15.01.24 математика 11у

Тема: «Производная»

Пусть x — произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности фиксированной точки x_0. Разность $x - x_0$ называется *приращением независимой переменной* (или *приращением аргумента*) в точке x_0 и обозначается Δx. Таким образом,

$$\Delta x = x - x_0,$$

откуда следует, что $x = x_0 + \Delta x$.

Говорят также, что первоначальное значение аргумента x_0 получило приращение Δx. Вследствие этого значение функции f изменится на величину

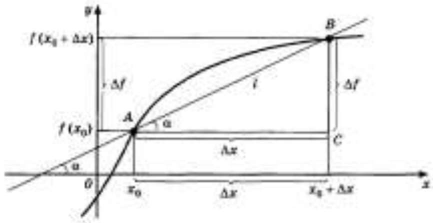
$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Эта разность называется *приращением функции* f в точке x_0, соответствующим приращению Δx, и обозначается символом Δf (читается «дельта эф»), т. е. по определению

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \qquad (1)$$

откуда

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f.$$



Определение. ***Производной функции f в точке x_0*** **называется число, к которому стремится разностное отношение**

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

при Δx, стремящемся к нулю.

Производная функции f в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$ (читается: «Эф штрих от x_0»).

Пример 1. Найдем производную функции $f(x) = x^3$ в точке x_0.

Будем действовать по описанной выше схеме.

1) $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 \quad (\Delta x \neq 0)$.

3) Теперь заметим, что слагаемое $3x_0^2$ постоянно, а при $\Delta x \to 0$ очевидно, что $3x_0 \Delta x \to 0$ и $(\Delta x)^2 \to 0$, а значит, и $3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 \to 0$. Получаем:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 3x_0^2 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Следовательно,

$$f'(x_0) = 3x_0^2.$$

Пример 2. Найдем производную функции $f(x) = kx + b$ (k и b постоянны) в точке x_0.

1) $\Delta f = (k(x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b) = k\Delta x$.

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = k$.

3) Поскольку k — постоянная, $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ — постоянное число при любом Δx, и, значит, $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to k$ при $\Delta x \to 0$.

Итак, $(kx + b)' = k$.

Таким образом можно найти производные всех элементарных функций. Получаем таблицу:

$f(x)$	$f'(x)$
C - const	0
x	1
$Kx + b$	k
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	$n * x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
sin x	cosx
cosx	- sinx
e^x	e^x
a^x	$a^x * \ln a$
lna	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x * \ln a}$
tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$
ctgx	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

«Правила дифференцирования»

Правила вычисления производных

1. $(U + Y)' = U' + Y'$	**3.** $(U * Y)' = U' * Y + U * Y'$
2. $(k * U)' = k * (U)'$	**4.** $\left(\frac{U}{Y}\right)' = \left(\frac{U' * Y - U * Y'}{Y^2}\right)$

Правила дифференцирования	https://resh.edu.ru/subject/lesson/3954/main/201015/